

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo

CÓDIGO MAT-CAL 1.9-G1	NIVEL ● G · Genérico	TIEMPO ESTIMADO 5-10 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO 1.9 Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante aplique el Teorema del Valor Intermedio para garantizar que una ecuación tiene al menos una solución en un intervalo.			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema aparece cuando te piden **mostrar que existe** una solución de una ecuación en un intervalo, sin necesidad de encontrarla: por ejemplo, que $\cos x = x$ tiene una solución en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aquí se espera que pases todo a un lado, compruebes la continuidad y encuentres un cambio de signo, aunque la ecuación no se pueda resolver con álgebra.

 **Pista:** Aparecen frases como «muestra que la ecuación tiene al menos una solución en (a, b) ».

 **Pista:** La ecuación no se puede despejar fácilmente (mezcla polinomios, trigonométricas, exponenciales o logaritmos).

 **Frontera:** Si se pregunta si **se cumplen las hipótesis** del teorema o qué garantiza, NO es este arquetipo → ve a «Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio» (1-T2).

 **Frontera:** Si se pide el **valor aproximado** de la raíz, NO es este arquetipo → ve a «Método de Newton» (3.11-G1).

 **Conexión:** Prerrequisito: «Hallar los intervalos donde una función es continua» (1.8-G3).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Ecuación	—	_____ = _____
Función auxiliar	$h(x)$	$h(x) = \text{_____} - \text{_____}$
Intervalo	$[a, b]$	$[\text{____}, \text{____}]$
Valores en los extremos	$h(a), h(b)$	$h(a) = \text{_____}$ $h(b) = \text{_____}$
¿Qué se pide?	☐ Demostrar que existe una solución ☐ Encontrar un intervalo que la contenga	
Representación <i>[Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]</i>		

☐ **Control:** ¿ $h(a)$ y $h(b)$ tienen **signos opuestos**? ☐ Sí ☐ No → prueba otro intervalo

3 **ACTIVA** · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Teorema del Valor Intermedio Si f es continua en $[a, b]$ y k está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = k$.	Garantiza que se alcanza cada valor intermedio.
Versión para raíces Si h es continua en $[a, b]$ y $h(a) \cdot h(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ con $h(c) = 0$.	Caso más usado.

 **Conexión:** Ficha teórica: Tema 1.9 – Teorema del Valor Intermedio.

4 **RESUELVE** · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Pasa** todo a un lado y llama $h(x)$ a esa expresión: la ecuación queda $h(x) = 0$.

B · PROCESO TÉCNICO

2. **Verifica** que h es continua en todo $[a, b]$.

 **Cuidado:** Si h tiene una asíntota, un salto o un punto fuera de su dominio dentro de $[a, b]$, el teorema no se aplica.

3. **Evalúa** $h(a)$ y $h(b)$.

 **Clave:** Continuidad + cambio de signo **garantizan** la raíz, aunque no sepas dónde está exactamente.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

4. **Comprueba** el cambio de signo.

 **Control:** ¿ $h(a) \cdot h(b) < 0$? Sí → aplica el teorema. No → busca otro intervalo.

5. **Concluye** citando el Teorema del Valor Intermedio.

5 **COMPRUEBA** · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Pasaste todo a un lado antes de evaluar?
☐	¿Justificaste la continuidad en todo $[a, b]$?
☐	¿Los valores $h(a)$ y $h(b)$ están bien calculados?
☐	¿Una gráfica muestra el cruce con el eje x ?
☐	¿Citaste el teorema en la conclusión?

6 **RECUERDA** · Tip Final del Profesor

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?



No necesitas **encontrar** la raíz: basta con una función **continua** que cambie de signo.

7

**PRACTICA · Práctica Aplicada – 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Directa</i>	Muestra que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en $[0, 1]$.
Versión 2 <i>Trigonometría</i>	Muestra que $\cos x = x$ tiene una solución en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Versión 3 <i>Logaritmo</i>	Muestra que $\ln x = 3 - 2x$ tiene una solución en $[1, 2]$.
Versión 4 <i>Incógnita invertida</i>	Encuentra un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz de $x^4 + x - 3 = 0$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Muestra que $2^x = x^2$ tiene una solución en $(-1, 0)$.

CLAVE DE RESPUESTAS

- $h(x) = x^3 + x - 1$ es continua (polinomio); $h(0) = -1 < 0$ y $h(1) = 1 > 0$.
- $h(x) = \cos x - x$ es continua; $h(0) = 1 > 0$ y $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$.
- $h(x) = \ln x + 2x - 3$ es continua en $[1, 2]$; $h(1) = -1 < 0$ y $h(2) = \ln 2 + 1 > 0$.
- Con $h(x) = x^4 + x - 3$: $h(1) = -1$ y $h(2) = 15$, luego sirve $[1, 2]$ (también $[-2, -1]$).
- $h(x) = 2^x - x^2$ es continua en $[-1, 0]$; $h(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ y $h(0) = 1 > 0$, luego hay una raíz en $(-1, 0)$.