

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)

CÓDIGO MAT-CAL 1.5-T1	NIVEL ■ T · Teórico	TIEMPO ESTIMADO 15-20 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO 1.5 Definición formal de límite (ε - δ)	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante construya y redacte una demostración formal de un límite con la definición (ε - δ , ε - N o M - δ).			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema aparece cuando te piden **demostrar** con la definición que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, es decir, para **cualquier** $\varepsilon > 0$: por ejemplo, «demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ ». Incluye sus variantes: un límite infinito (para todo $M > 0$ hallas δ) o un límite al infinito (para todo $\varepsilon > 0$ hallas N). Aquí se espera que encuentres δ (o N) y redactes la prueba, aunque haya que acotar un factor que depende de x .

 **Pista:** Aparecen «demuestra», «prueba» o «usa la definición» (ε - δ , ε - N , M - δ) con una función **concreta**.

 **Pista:** No se da un valor numérico de ε (o de M): la prueba debe valer para todos.

 **Frontera:** Si se da un **valor numérico** de ε , NO es este arquetipo → ve a «Encontrar δ para un ε dado» (1.5-G1).

 **Frontera:** Si se pide demostrar que el límite **no existe**, NO es este arquetipo → ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).

 **Frontera:** Si la afirmación es **general** (funciones f y g cualesquiera), NO es este arquetipo → ve a «Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad» (1-T3).

 **Conexión:** Prerrequisito: «Encontrar δ para un ε dado» (1.5-G1).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Hipótesis	—	$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $L = \underline{\hspace{1cm}}$
Tesis (lo que hay que demostrar)	—	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$ (o la variante ε - N o M - δ que corresponda)
Herramientas	—	☐ Factorizar $ x - a $ ☐ Acotar un factor ☐ Desigualdad triangular
¿Qué se pide?	☐ Demostración completa ☐ Expresión de δ en función de ε	
Representación [Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]		

☐ **Control:** ¿Separaste el **borrador** (buscar δ) de la **prueba** (verificar δ)? ☐ Sí ☐ No → hazlo en dos partes

3 ACTIVA · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Definición ε-δ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Es lo que la prueba debe establecer.
Acotación de un factor $ x - a < 1 \Rightarrow x + c \leq x - a + a + c < 1 + a + c $	Controla factores que dependen de x (desigualdad triangular).
Mínimo $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$	K es la cota del factor: cumple a la vez la restricción y la estimación.
Límite infinito $\forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M$	Definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
Límite al infinito $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x > N \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Definición de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$; misma estrategia, con N en lugar de δ .

 **Conexión:** Ficha teórica: Tema 1.5 – Definición formal de límite.

4 RESUELVE · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Escribe** $|f(x) - L|$ y factoriza para que aparezca $|x - a|$ (en las variantes, parte de $f(x) > M$ o de $|f(x) - L| < \varepsilon$).
2. **Acota** el factor restante si depende de x (restringe $|x - a| < 1$).

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

3. **Elige** δ en función de ε .

 **Clave:** δ se **descubre** en el borrador y se **verifica** en la prueba: la prueba empieza con «Sea $\varepsilon > 0$; tomemos $\delta = \dots$ ».

4. **Redacta** la cadena: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| = \dots < \varepsilon$.

 **Cuidado:** δ puede depender de ε , pero **nunca** de x .

C · REVISIÓN

5. **Revisa** cada desigualdad de la cadena.

☐ **Control:** ¿Cada paso está justificado y la cadena termina en «menor que ε »? Sí → la prueba está completa.

6. **Concluye** con «por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ».

5 COMPRUEBA · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿La prueba empieza fijando un $\varepsilon > 0$ cualquiera?
☐	¿ δ depende solo de ε ?
☐	¿Cada desigualdad de la cadena está justificada?
☐	¿Probaste tu δ con un ε concreto (por ejemplo, 0,1)?



¿Terminaste con la conclusión formal?

6**RECUERDA • Tip Final del Profesor**

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?



Una demostración ε - δ tiene **dos momentos**: en el borrador buscas δ trabajando hacia atrás; en la prueba lo verificas hacia adelante.

7**PRACTICA • Práctica Aplicada - 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Directa (lineal)</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.
Versión 2 <i>Límite infinito</i>	Demuestra con la definición que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.
Versión 3 <i>Función con hueco</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.
Versión 4 <i>Límite al infinito</i>	Demuestra con la definición que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

CLAVE DE RESPUESTAS

- $|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3|$, luego $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.
- Dado $M > 0$: $\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, luego $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.
- Para $x \neq 2$ la expresión es $x + 2$, así que $|f(x) - 4| = |x - 2|$: $\delta = \varepsilon$.
- Dado $\varepsilon > 0$, toma $N = \frac{1}{\varepsilon}$: si $x > N$, entonces $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$.
- $|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$; con $|x - 3| < 1$ se tiene $|x + 3| < 7$, luego $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$.