

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Límite que se reduce a $\frac{\sin(u)}{u}$ o a $(1 - \cos u)/u$

CÓDIGO MAT-CAL 1.4-G1	NIVEL ● G · Genérico	TIEMPO ESTIMADO 5-10 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO 1.4 Límites trigonométricos	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante transforme una indeterminación trigonométrica 0/0 en los límites fundamentales $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$.			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema aparece cuando, al sustituir $x=a$, obtienes **0/0** y el cero viene de un **seno, coseno o tangente**: por ejemplo $\frac{\sin(5x)}{x}$ en $x=0$. Aquí se espera que ajustes la expresión para que aparezca $\frac{\sin u}{u}$ o $\frac{1 - \cos u}{u}$ con $u \rightarrow 0$, aunque el argumento no sea simplemente x o haya que cambiar de variable ($u=x-a$).

 **Pista:** Al sustituir $x=a$ obtienes **0/0**.

 **Pista:** Aparece $\sin(kx)$, $\tan(kx)$ o $1 - \cos(kx)$ con $x \rightarrow 0$, o una función trigonométrica que vale 0 en $x=a$.

 **Frontera:** Si $x \rightarrow \infty$ (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow \infty$), NO es este arquetipo → ve a «Teorema del emparedado» (1.3-G6).

 **Frontera:** Si al sustituir **no** obtienes 0/0 (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$), NO es este arquetipo → ve a «Límite por sustitución directa» (1.3-G1).

 **Conexión:** Prerrequisito: identidades trigonométricas básicas (Precálculo).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Expresión	$f(x)$	_____
Punto de interés	a	$x \rightarrow$ _____
Argumento que tiende a 0	u	$u =$ _____ $\rightarrow 0$
¿Qué se pide?	☐ Valor del límite	
Representación [Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]		

☐ **Control:** ¿Hay un argumento u que tiende a 0 (directamente o con $u=x-a$)? ☐ Sí ☐ No → revisa la  frontera

⚠ Cuidado: $\frac{\sin(5x)}{x}$ **no** se simplifica como «sen 5»: el 5 está dentro del seno.

3 **ACTIVA** · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Límite fundamental del seno $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$	Base de todo el arquetipo.
Límite del coseno $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$	Para expresiones con $1 - \cos u$.
Tangente $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$	Sale del límite del seno, porque $\frac{\tan u}{u} = \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u}$.
Identidad útil $(1 - \cos u)(1 + \cos u) = \sin^2 u$	Para transformar $\frac{1 - \cos u}{u^2}$.

 **Conexión:** Ficha teórica: Tema 1.4 – Límites trigonométricos.

4 **RESUELVE** · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Sustituye** $x = a$ y confirma la forma $0/0$.
2. **Identifica** el argumento u de cada función trigonométrica; si no tiende a 0, cambia de variable ($u = x - a$).

B · PROCESO TÉCNICO

3. **Ajusta** la expresión multiplicando y dividiendo para que cada $\sin u$ quede dividido entre el mismo u .

 **Clave:** El denominador debe coincidir **exactamente** con el argumento del seno: $\sin(5x)$ necesita $5x$ debajo.

4. **Separa** la expresión en factores con límites conocidos.
5. **Aplica** los límites fundamentales y calcula.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

6. **Revisa** el resultado.
☐ **Control:** ¿Todos los factores tienen límite conocido? Sí → multiplica. No → reescribe con identidades.
7. **Concluye** con el valor del límite.

5 **COMPRUEBA** · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Cada $\sin u$ quedó dividido exactamente entre u ?
☐	¿Compensaste las constantes que agregaste?
☐	¿Trabajaste en radianes?
☐	¿Una tabla con x cerca de a confirma el valor?



¿Simplificaste el resultado?

6**RECUERDA • Tip Final del Profesor***Fijar la clave del arquetipo • ¿Qué no debo olvidar?*

Ante 0/0 con trigonometría, **fabrica** el $\frac{\sin u}{u}$: lo que multiplicas abajo, lo compensas arriba.

7**PRACTICA • Práctica Aplicada - 5 versiones***Transferir el arquetipo a casos nuevos • ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?*

Versión 1 <i>Directa</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.
Versión 2 <i>Dos senos</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}$.
Versión 3 <i>Con coseno</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
Versión 4 <i>Tangente</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x}$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ (usa $u = x - \pi$).

CLAVE DE RESPUESTAS

1. 5.

2. $\frac{3}{7}$.3. $\frac{1}{2}$ (multiplica arriba y abajo por $1 + \cos x$).

4. 2.

5. -1, porque $\sin x = -\sin(x - \pi)$.