

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Teorema del emparedado

CÓDIGO MAT-CAL 1.3-G6	NIVEL ● G · Genérico	TIEMPO ESTIMADO 10 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO 1.3 Cálculo algebraico de límites: leyes y formas indeterminadas 0/0	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante use cotas y el teorema del emparedado cuando las técnicas algebraicas no sirven.			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando una función que **oscila pero está acotada** —como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ o $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ — se multiplica por otra que **tiende a 0**, o cuando te dan dos funciones que encierran a f ; por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Aquí se espera que construyas las cotas y concluyas, aunque el límite del factor oscilante no exista.

 **Pista:** Aparece $\sin$ o $\cos$ de un argumento que no tiene límite (por ejemplo, $\frac{1}{x}$ o $\frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$, o x cuando $x \rightarrow \infty$).

 **Pista:** Ese factor está multiplicado por otro que tiende a 0 (x , x^2 , $\sqrt{x}$...).

 **Pista:** El enunciado da desigualdades del tipo $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

 **Frontera:** Si falta el factor que tiende a 0 (por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$), NO es este arquetipo: el límite no existe —ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).

 **Frontera:** Si aparece $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow 0$, NO es este arquetipo —ve a «Límite que se reduce a $\sin(u)/u$ o a $(1 - \cos u)/u$ » (1.4-G1).

 **Conexión:** Prerrequisito: acotación de seno y coseno, $-1 \leq \sin u \leq 1$.

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Factor acotado	—	_____ cotas: _____ $\leq$ factor $\leq$ _____
Factor que tiende a 0	—	_____
Punto de interés	a	$x \rightarrow$ _____
Cotas dadas (si las hay)	g, h	_____ $\leq f(x) \leq$ _____
¿Qué se pide?	☐ Valor del límite ☐ Justificación con cotas	

Representación

[Si aplica: gráfica, diagrama,
tabla, esquema...]

☐ **Control:** ¿Tienes, o puedes construir, dos cotas que tiendan al **mismo** valor? ☐ Sí ☐ No → revisa la  frontera

3 **ACTIVA** · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Teorema del emparedado Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para x cerca de a ($x \neq a$) y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Obtiene el límite de f a partir de dos cotas. Vale también para límites laterales y para $x \rightarrow \pm \infty$.
Cota de seno y coseno $-1 \leq \sin u \leq 1, -1 \leq \cos u \leq 1$	Punto de partida de las cotas.
Versión con valor absoluto Si $ f(x) \leq g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	Evita problemas de signo.

 **Conexión:** Ficha teórica: Tema 1.3 – Cálculo algebraico de límites.

4 **RESUELVE** · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Identifica** el factor acotado y el factor que tiende a 0.
2. **Escribe** la cota básica del factor acotado (por ejemplo, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$).

B · PROCESO TÉCNICO

3. **Multiplika** la desigualdad por el otro factor para encerrar a f .

 **Cuidado:** Si ese factor puede ser negativo, las desigualdades se invierten: usa valor absoluto.

4. **Calcula** el límite de cada cota.

 **Clave:** Las dos cotas deben tender al **mismo** valor; si no, el teorema no concluye nada.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

5. **Aplica** el teorema.

☐ **Control:** ¿Ambas cotas tienen el mismo límite? Sí → ese es el límite de f . No → busca otras cotas.

6. **Concluye** citando el teorema del emparedado.

5 **COMPRUEBA** · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Las cotas son válidas para todos los x cercanos a a ?
☐	¿Revisaste el signo del factor al multiplicar?

☐	¿Las dos cotas tienen el mismo límite?
☐	¿Una gráfica o una tabla muestra a f encerrada entre las cotas?
☐	¿Citaste el teorema en la conclusión?

6**RECUERDA · Tip Final del Profesor***Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?*

Cuando un factor **oscila sin control** pero está acotado, no intentes calcular su límite: **enciérralo** y deja que el otro factor lo lleve a cero.

7**PRACTICA · Práctica Aplicada - 5 versiones***Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?*

Versión 1 <i>Directa</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Versión 2 <i>Otra función acotada</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}$.
Versión 3 $x \rightarrow \infty$	Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.
Versión 4 <i>Cotas dadas</i>	Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcula $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \llbracket 1/x \rrbracket$, donde $\llbracket \cdot \rrbracket$ es la parte entera.

CLAVE DE RESPUESTAS

- 0, porque $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.
- 0, porque $e^{-1}\sqrt{x} \leq \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)} \leq e\sqrt{x}$.
- 0, porque $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ para $x > 0$.
- 7: ambas cotas son continuas y valen 7 en $x = 4$.
- 1: como $\frac{1}{x} - 1 < \llbracket 1/x \rrbracket \leq \frac{1}{x}$, para $x > 0$ se tiene $1 - x < x \llbracket 1/x \rrbracket \leq 1$.