

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Límite en un punto donde cambia la fórmula

CÓDIGO MAT-CAL 1.2-G1	NIVEL ● G · Genérico	TIEMPO ESTIMADO 10 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO 1.2 Límites laterales	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante use los límites laterales para decidir si un límite existe cuando la función cambia de fórmula en $x=a$.			

Pista
 Frontera
 Cuidado
 Clave
 ☐ Control
 Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando la función tiene **una fórmula a cada lado** de un punto — funciones por tramos, valor absoluto o parte entera— y te preguntan por el límite justo en ese punto; por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. Aquí se espera que calcules cada límite lateral con la fórmula que corresponde, aunque $f(a)$ esté definido con una tercera fórmula.

Pista: La función está definida por tramos, con condiciones como $x < a$ y $x \geq a$.

Pista: Aparece $|x - a|$, o $|g(x)|$ con $g(a) = 0$.

Pista: Aparece la parte entera $\llbracket x \rrbracket$ con a entero.

Frontera: Si a **no** es el punto donde cambia la fórmula, NO es este arquetipo → ve a «Límite por sustitución directa» (1.3-G1), con la fórmula que rige cerca de a .

Frontera: Si te piden **constantes** para que el límite exista o la función sea continua, NO es este arquetipo → ve a «Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua» (1-I1).

Conexión: Prerrequisito: «Límite a partir de una gráfica» (1.1-G1).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Función	f	$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ si $\underline{\hspace{2cm}}$; $\underline{\hspace{2cm}}$ si $\underline{\hspace{2cm}}$
Punto donde cambia la fórmula	a	$x \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$
Fórmula a la izquierda	$x < a$	$\underline{\hspace{2cm}}$
Fórmula a la derecha	$x > a$	$\underline{\hspace{2cm}}$
¿Qué se pide?	☐ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ☐ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ☐ ¿Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?	
Representación [Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]		

☐ **Control:** ¿Reescribiste el valor absoluto o la parte entera **por tramos**? ☐ Sí ☐ No → hazlo antes de seguir

Cuidado: Para $x < a$, $|x - a| = -(x - a)$. Olvidar el signo menos es el error más común.

3 ACTIVA · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	Cada uno se calcula con la fórmula de su lado.
Criterio de existencia $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	Decide si el límite existe.
Valor absoluto $ u = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$	Permite escribir $ x - a $ por tramos.
Parte entera $\llbracket x \rrbracket = n$ si $n \leq x < n+1$, con n entero	Por la izquierda de un entero n vale $n-1$; por la derecha, n .

 **Conexión:** Ficha teórica: Tema 1.2 – Límites laterales.

4 RESUELVE · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Identifica** la fórmula que rige a cada lado de a (reescribe $|\cdot|$ o $\llbracket \cdot \rrbracket$ por tramos).

B · PROCESO TÉCNICO

2. **Calcula** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ usando solo la fórmula de la izquierda.

 **Clave:** Cada lateral se calcula **solo** con la fórmula de su lado; el valor $f(a)$ no interviene.

3. **Calcula** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ usando solo la fórmula de la derecha.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

4. **Compara** los dos laterales.

 **Control:** ¿Son iguales? Sí → el límite existe y vale eso. No → el límite no existe.

5. **Concluye** escribiendo los tres límites (izquierdo, derecho y bilateral).

5 COMPRUEBA · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Usaste la fórmula correcta a cada lado?
☐	¿Escribiste el valor absoluto con el signo correcto a cada lado?
☐	¿Evitaste usar $f(a)$ para calcular el límite?
☐	¿Una gráfica rápida de los dos tramos confirma tu resultado?
☐	¿Distes los dos laterales y la conclusión sobre el bilateral?

6

**RECUERDA · Tip Final del Profesor**

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?



En un punto donde cambia la fórmula, **divide el problema en dos**: un límite por cada lado. El límite existe solo si los dos lados se ponen de acuerdo.

7

**PRACTICA · Práctica Aplicada – 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Directa</i>	Sea $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 2 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
Versión 2 <i>Valor absoluto</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x-3 }{x-3}$.
Versión 3 <i>Parte entera</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor$ y $\lim_{x \rightarrow 2,5} \lfloor x \rfloor$.
Versión 4 <i>Con valor aislado</i>	Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y compáralo con $f(1)$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Calcula $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+2x}{ x+2 }$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Por la izquierda $2^2+1=5$ y por la derecha $3 \cdot 2 - 1 = 5$: el límite es 5.
2. Por la izquierda -1 y por la derecha 1: el límite no existe.
3. 1, 2 y 2 (en 2,5 la fórmula no cambia).
4. Ambos laterales valen 2: el límite es 2, distinto de $f(1)=3$.
5. Como $x^2+2x = x(x+2)$, por la izquierda la expresión vale $-x-2$ y por la derecha $x-2$: el límite no existe.