

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Demostrar que un límite no existe

CÓDIGO MAT-CAL 1-T1	NIVEL ■ T · Teórico	TIEMPO ESTIMADO 10-15 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO Límites y continuidad (arquetipo del módulo)	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante demuestre con rigor que el límite de una función concreta no existe (laterales distintos, oscilación o crecimiento sin cota).			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando te dan una función **concreta** y te piden **demostrar o justificar** que su límite en un punto no existe. Aquí se espera que elijas el argumento adecuado —laterales distintos, dos sucesiones que llevan a valores distintos o crecimiento sin cota— y lo redactes, incluso si una tabla sugiere otra cosa. Ejemplo mínimo: demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ no existe.

 **Pista:** Aparecen «demuestra que no existe» o «justifica que el límite no existe», con una fórmula dada.

 **Pista:** La función tiene saltos, oscila (como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$) o se comporta distinto a cada lado.

 **Frontera:** Si solo se pide **calcular** los laterales en un punto de cambio, NO es este arquetipo → ve a «Límite en un punto donde cambia la fórmula» (1.2-G1).

 **Frontera:** Si se pide demostrar que un límite **sí** existe y vale L , NO es este arquetipo → ve a «Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)» (1.5-T1).

 **Frontera:** Si la afirmación es **general** (sobre funciones f y g cualesquiera, sin fórmula), NO es este arquetipo → ve a «Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad» (1-T3).

 **Conexión:** Prerrequisitos: 1.2-G1 (laterales) y 1.1-G2 (la tabla engañosa de $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Hipótesis	—	$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $a = \underline{\hspace{2cm}}$
Tesis	—	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe
Estrategia	—	☐ Laterales distintos ☐ Dos sucesiones con límites distintos ☐ Crecimiento sin cota
¿Qué se pide?	☐ Demostración	
Representación [Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]		

☐ **Control:** ¿Elegiste **una** estrategia y la aplicaste completa? ☐ Sí ☐ No

 **Cuidado:** Una tabla o una gráfica **no demuestran**: solo sugieren.

3 **ACTIVA** · Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Laterales distintos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe	Estrategia para saltos.
Criterio de sucesiones Si $x_n \rightarrow a$ y $y_n \rightarrow a$ (con $x_n \neq a$, $y_n \neq a$), pero $f(x_n) \rightarrow L_1$ y $f(y_n) \rightarrow L_2$ con $L_1 \neq L_2$, el límite no existe	Estrategia para oscilaciones.
No acotada Si f no está acotada cerca de a (por ejemplo, $f(x) \rightarrow \pm \infty$), el límite no existe como número	Estrategia para asíntotas.

 **Conexión:** Ficha teórica: Temas 1.2 y 1.5.

4 **RESUELVE** · Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Explora** el comportamiento cerca de a (gráfica o tabla) para elegir la estrategia.

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

2. **Construye** dos caminos hacia a (laterales o sucesiones) que lleven a valores distintos, o muestra que f no está acotada.

 **Clave:** Basta **un** par de caminos hacia a que den valores distintos para probar que el límite no existe.

3. **Calcula** el límite de f por cada camino.

C · REVISIÓN

4. **Verifica** que ambos caminos tienden a a .

☐ **Control:** ¿Los dos caminos se acercan a a y dan valores distintos? Sí → la prueba está completa.

5. **Concluye:** «por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe».

5 **COMPRUEBA** · Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Los caminos elegidos tienden realmente a a ?
☐	¿Los valores obtenidos son distintos?
☐	¿La argumentación no depende solo de una tabla?
☐	¿Cada paso está justificado?
☐	¿Terminaste con la conclusión formal?

6

**RECUERDA · Tip Final del Profesor**

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?



Para probar que un límite **no** existe no necesitas analizar todo: **un solo contraejemplo** (dos caminos distintos) basta.

7

**PRACTICA · Práctica Aplicada – 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Directa</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$ no existe.
Versión 2 <i>Oscilación</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.
Versión 3 <i>Infinitos opuestos</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ no existe.
Versión 4 <i>Parte entera</i>	Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \llbracket x \rrbracket$ no existe.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Sea $f(x)=1$ si x es racional y $f(x)=0$ si x es irracional (función de Dirichlet). Demuestra que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe para ningún a .

CLAVE DE RESPUESTAS

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$: los laterales son distintos.
- $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ tienden a 0, pero $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$ y $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1$ para todo n .
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket x \rrbracket = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket x \rrbracket = 0$.
- Toda vecindad de a contiene racionales ($f=1$) e irracionales ($f=0$): hay sucesiones $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow a$ con $f(x_n) \rightarrow 1$ y $f(y_n) \rightarrow 0$.