

PLANTILLA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esbozar una gráfica que cumpla condiciones de límites

CÓDIGO MAT-CAL 1-I3	NIVEL ◆ I · Integrador	TIEMPO ESTIMADO 10–15 min por versión	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
DISCIPLINA · ASIGNATURA Matemáticas · Cálculo Diferencial · Módulo 1		TEMA DEL ÍNDICE MAESTRO Límites y continuidad (arquetipo del módulo)	
QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO Que el estudiante traduzca condiciones analíticas (límites, valores, continuidad) a rasgos de una gráfica.			

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
 ☐ Control
  Conexión

1 RECONOCE · Identificación del Problema

Reconocer el arquetipo antes de calcular · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando te dan una **lista de condiciones** —valores de f , límites laterales, límites al infinito— y te piden dibujar una función que las cumpla. Aquí se espera que traduzcas cada condición a un rasgo de la gráfica, incluso si hay muchas gráficas posibles. Ejemplo mínimo: «esboza f con $f(0)=1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=3$ ».

 **Pista:** El enunciado es una lista de condiciones: $f(a)=\dots$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)=\dots$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\dots$

 **Pista:** Se pide «esboza la gráfica de una función que cumpla...» o «da una fórmula que cumpla...».

 **Pista:** Variante: «da un ejemplo de función con una discontinuidad removible (o de salto) en $x=a$ ».

 **Frontera:** Si te dan la **fórmula** y piden analizar la gráfica, NO es este arquetipo → ve a «Análisis completo de las asíntotas de una función racional» (1-I2).

 **Frontera:** Si te dan la **gráfica** y piden los límites, NO es este arquetipo → ve a «Límite a partir de una gráfica» (1.1-G1).

 **Conexión:** Es el problema inverso de «Límite a partir de una gráfica» (1.1-G1).

2 ORGANIZA · Datos Iniciales

Leer activamente y organizar la información · ¿Qué tengo y qué me piden?

Elemento del problema	Notación	Valor, expresión o condición
Condiciones sobre valores	$f(a)$	_____
Condiciones laterales	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	_____
Condiciones al infinito	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	_____
¿Qué se pide?	☐ Esbozo de la gráfica ☐ Una fórmula que cumpla las condiciones	
Representación [Si aplica: gráfica, diagrama, tabla, esquema...]		

☐ **Control:** ¿Las condiciones son **compatibles** entre sí (no se contradicen)? ☐ Sí ☐ No → revisa el enunciado

3 ACTIVA • Fórmulas o Conceptos Clave

Activar solo la teoría necesaria · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Traducción de condiciones $f(a)=b$ – punto relleno; $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=b \neq f(a)$ – hueco en (a, b) ; un lateral $\pm \infty$ – asíntota vertical; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)=L$ – asíntota horizontal $y=L$	Diccionario entre el lenguaje analítico y el gráfico.
Funciones modelo $\frac{1}{x-a}$ (signos opuestos a cada lado de a); $\frac{1}{(x-a)^2}$ (mismo signo); $L+e^{-x}$ (tiende a L cuando $x \rightarrow \infty$)	Ayudan a dar una fórmula.

 **Conexión:** Fichas teóricas: Temas 1.1, 1.2, 1.6 y 1.7.

4 RESUELVE • Resolución Paso a Paso

Seguir un camino válido para cualquier versión · ¿Qué hago y en qué orden?

A • DESCOMPÓN

1. **Traduce** cada condición a un rasgo gráfico (punto, hueco, asíntota, salto).

B • RESUELVE CADA PARTE

2. **Dibuja** primero las asíntotas y los puntos fijos.

 **Clave:** Dibuja primero lo que **no se negocia** (asíntotas y puntos); después une con curvas suaves.

3. **Une** los rasgos con curvas simples, respetando cada límite lateral.

 **Cuidado:** No agregues rasgos que el enunciado no pide (saltos o asíntotas extra).

C • INTEGRA

4. **Revisa** condición por condición sobre tu gráfica.

 **Control:** ¿Tu gráfica cumple **todas** las condiciones? Marca cada una.

5. **Concluye** presentando el esbozo (y una fórmula, si se pide).

5 COMPRUEBA • Verificación Final

Comprobar por caminos independientes · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

☐	¿Cada condición aparece en la gráfica?
☐	¿Los puntos rellenos y vacíos están bien marcados?
☐	¿Las asíntotas están dibujadas con línea punteada?
☐	¿Evitaste rasgos no pedidos?
☐	Si diste una fórmula, ¿comprobaste sus límites?

6

**RECUERDA · Tip Final del Profesor**

Fijar la clave del arquetipo · ¿Qué no debo olvidar?

Hay **muchas respuestas correctas**: lo que se evalúa es que cada condición esté bien traducida.

7

**PRACTICA · Práctica Aplicada - 5 versiones**

Transferir el arquetipo a casos nuevos · ¿Puedo hacerlo solo en otro caso?

Versión 1 <i>Directa</i>	Esboza f con $f(0)=1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=2$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=1$.
Versión 2 <i>Asíntota doble</i>	Esboza f con $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)=0$.
Versión 3 <i>Signos opuestos</i>	Esboza f con $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)=1$.
Versión 4 <i>Fórmula en lugar de gráfica</i>	Da una fórmula de f con $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)=2$.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Esboza f con $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=3$, $f(0)=3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$, con f continua salvo en $x=0$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Salto en $x=0$: la rama izquierda llega a $(0, 2)$ con un punto vacío; la rama derecha empieza en $(0, 1)$ con un punto relleno.

2. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.

3. Por ejemplo, $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

4. Por ejemplo, $f(x) = 2 + \frac{1}{(x-1)^2}$.

5. Asíntota vertical en $x=0$ solo por la izquierda: la rama izquierda sale de $y=0$ y cae a $-\infty$ al acercarse a 0; la rama derecha parte de $(0, 3)$ (punto relleno) y baja hacia $y=-1$.