

FICHA TEÓRICA

Límites y continuidad

CÓDIGO MAT-CAL · Ficha teórica · Módulo 1	ASIGNATURA Cálculo Diferencial	TEMAS · ARQUETIPOS 9 temas · 33 arquetipos	VERSIÓN v1.0 · 09/2026
---	-----------------------------------	---	---------------------------

 Idea central  Definición  Teorema  Fórmulas y técnicas  Errores comunes  Practica con

 Objetivos del módulo

Al terminar el módulo serás capaz de...

- **Interpretar** el límite de una función a partir de su gráfica y de tablas de valores.
- **Calcular** límites de forma algebraica, incluidas las formas indeterminadas del tipo $0/0$.
- **Analizar** límites infinitos y al infinito, e identificar asíntotas.
- **Decidir** si una función es continua, **clasificar** sus discontinuidades y **aplicar** el Teorema del Valor Intermedio.
- **Comprender** y usar la definición formal ε - δ del límite.

 Prerrequisitos

- Funciones y sus gráficas, dominio (Precálculo).
- Factorización, productos notables, racionalización y fracciones algebraicas (Precálculo).
- Funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas (Precálculo).
- Desigualdades y valor absoluto (Precálculo).

 Mapa del módulo

Cada tema, su idea en una línea y los arquetipos con que se evalúa.

Tema	Nombre	Idea en una línea	Arquetipos del tema
1.1	Idea intuitiva de límite: estimación gráfica y numérica	Hacia dónde va $f(x)$, no dónde está	1.1-G1 · 1.1-G2
1.2	Límites laterales	Cada lado por separado	1.2-G1
1.3	Cálculo algebraico de límites: leyes y formas indeterminadas $0/0$	Sustituir; si sale $0/0$, transformar	1.3-G1 a 1.3-G6
1.4	Límites trigonométricos	Casi todo se reduce al límite fundamental del seno	1.4-G1
1.5	Definición formal de límite (ε - δ)	Tan cerca como se quiera	1.5-G1 · 1.5-T1
1.6	Límites infinitos y asíntotas verticales	Crece sin cota cerca de a	1.6-G1 · 1.6-G2
1.7	Límites al infinito y asíntotas horizontales y oblicuas	Comportamiento a largo plazo	1.7-G1 a 1.7-G4
1.8	Continuidad en un punto y tipos de discontinuidad	El límite coincide con el valor $f(a)$	1.8-G1 a 1.8-G4
1.9	Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio	Continua y cambia de signo $\Rightarrow$ hay raíz	1.9-G1

Arquetipos del módulo (combinan temas): 1-A1 · 1-A2 · 1-I1 · 1-I2 · 1-I3 · 1-T1 · 1-T2 · 1-T3 · 1-X1 · 1-X2

TEMA 1.1 Idea intuitiva de límite: estimación gráfica y numérica**IDEA CENTRAL**

El límite describe hacia qué valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a un número a , sin llegar a ser igual a a . Lo que ocurre exactamente en $x=a$ —si $f(a)$ existe o vale otra cosa— no afecta al límite.

DEFINICIONES**Límite (idea intuitiva)**

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en el propio a .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que los valores $f(x)$ se pueden hacer tan cercanos a L como se quiera tomando x suficientemente cerca de a , con $x \neq a$. Si ningún número L cumple esto, se dice que el límite no existe.

Se lee: «el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L ». También se escribe $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$.

TEOREMAS Y PROPIEDADES**El límite no depende de $f(a)$**

Si: $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, aunque $f(a) \neq g(a)$ o $f(a)$ no esté definido

Unicidad del límite

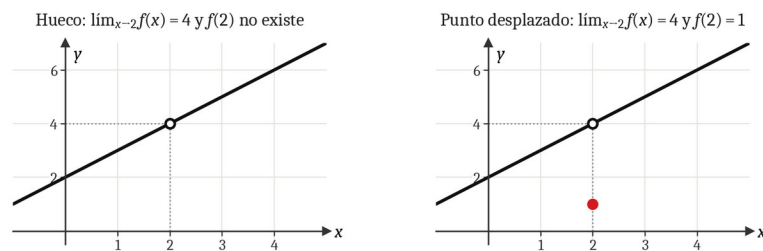
Si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y también $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$

Entonces: $L = M$: si el límite existe, es único

⚠ Por eso, si al acercarte a a por dos caminos distintos (por ejemplo, por la izquierda y por la derecha) $f(x)$ se acerca a valores distintos, el límite no existe (1-T1).

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Recorrer la gráfica hacia a por ambos lados	La función se da como gráfica	1.1-G1
Tabla con $x = a \pm 0,1$; $a \pm 0,01$; $a \pm 0,001$	Estimar numéricamente	1.1-G2

REPRESENTACIÓN

El límite es el mismo en ambas gráficas: solo cambia lo que ocurre exactamente en $x=2$.

ERRORES COMUNES

Confundir el límite con el valor $f(a)$: son cosas distintas.

Mirar solo un lado de a .

Tomar una tabla como demostración: $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ vale 0 en $x=0,1; 0,01; 0,001$, pero su límite cuando $x \rightarrow 0$ no existe.

Usar la calculadora en grados con funciones trigonométricas: en Cálculo los ángulos se miden en radianes.



PRACTICA CON

1.1-G1	Límite a partir de una gráfica
1.1-G2	Límite a partir de una tabla de valores

TEMA 1.2 Límites laterales



IDEA CENTRAL

A veces la función se comporta distinto a cada lado de a . Los límites laterales miran cada lado por separado, y el límite existe solo si los dos lados se ponen de acuerdo.



DEFINICIONES

Límites laterales

Por la izquierda. Sea f definida en un intervalo (c, a) , con $c < a$. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como se quiera tomando x suficientemente cerca de a , con $x < a$.

Por la derecha. Sea f definida en un intervalo (a, c) , con $c > a$. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ significa lo mismo, pero con $x > a$.

Funciones con cambio de fórmula

Por tramos: una fórmula distinta a cada lado de un punto.

Valor absoluto: $|u| = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$

Parte entera: $\llbracket x \rrbracket = n$ si $n \leq x < n+1$, con n entero; es decir, $\llbracket x \rrbracket$ es el mayor entero menor o igual que x .



TEOREMAS Y PROPIEDADES

Criterio de existencia del límite

Si: f está definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a , y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Y al revés: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, los dos límites laterales existen y valen L .

Si los laterales son distintos, o alguno no existe, el límite (bilateral) no existe.

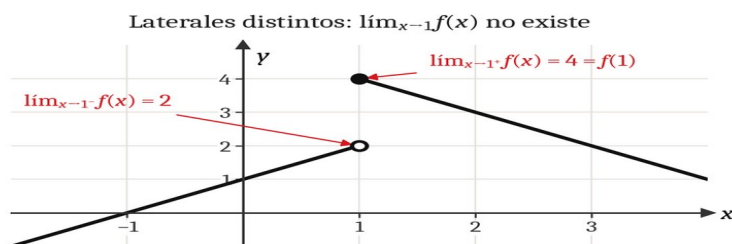


FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Reescribir $ \cdot $ y $\llbracket \cdot \rrbracket$ por tramos	Antes de calcular laterales	1.2-G1
Calcular cada lateral con la fórmula de su lado	Punto donde cambia la fórmula	1.2-G1
Comparar laterales para probar que el límite no existe	Demostraciones	1-T1



REPRESENTACIÓN



Por la izquierda $f(x)$ se acerca a 2; por la derecha, a 4. El límite en $x=1$ no existe.



ERRORES COMUNES

Usar la fórmula del lado equivocado.

Olvidar el signo menos: para $x < a$, $|x - a| = -(x - a)$.

Usar el valor $f(a)$ para calcular un límite lateral: los laterales, igual que el límite, no dependen de $f(a)$.



PRACTICA CON

1.2-G1	Límite en un punto donde cambia la fórmula
1-T1	Demostrar que un límite no existe (del módulo)

TEMA 1.3 Cálculo algebraico de límites: leyes y formas indeterminadas 0/0



IDEA CENTRAL

Si la función es continua en a , el límite es simplemente $f(a)$. Cuando al sustituir aparece una forma indeterminada como 0/0, todavía no hay respuesta: hay que transformar la expresión, sin cambiar sus valores para $x \neq a$, hasta poder sustituir.



DEFINICIONES

Forma indeterminada

Expresión como 0/0 que aparece al sustituir y cuyo valor **no** puede decidirse sin más análisis: el límite puede ser cualquier número, ∞ , $-\infty$ o no existir. En este módulo también aparecen $\frac{\infty}{\infty}$ y $\infty - \infty$.

Ejemplo: $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ da 0/0 en $x = 3$, pero $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Funciones que coinciden salvo en un punto

f y g coinciden salvo en a si $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a . Por ejemplo, $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $x + 3$ coinciden salvo en $x = 3$. Como el límite no depende del valor en $x = a$, sus límites en a son iguales.

**TEOREMAS Y PROPIEDADES****Leyes de los límites**

Si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ existen (son números reales), c es una constante y n es un entero positivo

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$; $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c L$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = L M$; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$;

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$; $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, se exige $L > 0$)

⚠ La ley del cociente exige $M \neq 0$. Si $M = 0$, esta ley no decide: hay que ver si la forma es $0/0$ (tema 1.3) o $L/0$ con $L \neq 0$ (tema 1.6).

Sustitución directa

Si: f es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica o trigonométrica (o se obtiene de ellas con operaciones y composiciones), y a es un punto interior de su dominio: f está definida en todo un intervalo abierto que contiene a a

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

⚠ Si a es un extremo del dominio (por ejemplo, $\sqrt{x}$ en $a=0$), solo tiene sentido el límite lateral: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Límite de funciones que coinciden

Si: $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

⚠ Es lo que justifica «cancelar» el factor $(x - a)$: la simplificación solo es válida para $x \neq a$, y eso basta.

Teorema del emparedado

Si: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

⚠ Las dos cotas deben tener el mismo límite; si no, el teorema no dice nada.

**FÓRMULAS Y TÉCNICAS**

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Sustituir $x = a$	Siempre, como primer paso	1.3-G1
Leyes de los límites con valores dados	No hay fórmulas: solo se conocen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	1.3-G2
Factorizar y cancelar $(x - a)$	$0/0$ con polinomios	1.3-G3
Conjugado: $(\sqrt{u} - b)(\sqrt{u} + b) = u - b^2$	$0/0$ con raíces	1.3-G4
Común denominador	$0/0$ con fracciones dentro de fracciones, o $\infty - \infty$ entre fracciones	1.3-G5
Cotas: $-1 \leq \sin u \leq 1$ y $-1 \leq \cos u \leq 1$	Función acotada multiplicada por otra que tiende a 0	1.3-G6

**ERRORES COMUNES**

Decir que $0/0$ «vale 0» o «vale 1»: es una forma indeterminada, no un número.

Cancelar términos que se **suman**: solo se cancelan factores que multiplican. Por ejemplo, $\frac{x+3}{x}$ no es igual a 3.

Aplicar la ley del cociente cuando el límite del denominador es 0.

Usar una técnica sin sustituir antes: la forma que aparece decide la técnica.



PRACTICA CON

1.3-G1	Límite por sustitución directa
1.3-G2	Límite de una combinación de funciones cuyos límites se conocen
1.3-G3	Forma 0/0 con polinomios: factorizar
1.3-G4	Forma 0/0 con radicales: racionalizar
1.3-G5	Forma 0/0 con fracciones: común denominador
1.3-G6	Teorema del emparedado

TEMA 1.4 Límites trigonométricos



IDEA CENTRAL

Los límites trigonométricos de la forma 0/0 no se resuelven factorizando: se reducen a un límite fundamental, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, que se demuestra con el teorema del emparedado.



DEFINICIONES

Argumento que tiende a cero

En $\sin u$, $\cos u$ o $\tan u$, u es el argumento; puede ser una expresión en x , como $u = 5x$ o $u = x - 2$. Los límites fundamentales se aplican cuando $u \rightarrow 0$.

Medida en radianes

Los límites fundamentales solo valen si el ángulo se mide en radianes.



TEOREMAS Y PROPIEDADES

Límite fundamental del seno

Si: el ángulo u se mide en radianes

Entonces: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ y, como consecuencia, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$

⚠ En grados, el primer límite vale $\frac{\pi}{180}$.

Límite fundamental con argumento compuesto

Si: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ y $u(x) \neq 0$ para $x \neq a$ cerca de a (ángulos en radianes)

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

⚠ El argumento del seno y el denominador deben ser la misma expresión: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$.

Límite del coseno

Si: el ángulo u se mide en radianes

Entonces: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$

Continuidad de seno y coseno

Si: a es cualquier número real

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ y $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

 FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Multiplicar y dividir para obtener $\frac{\sin u}{u}$	Aparece $\sin kx$ con $k \neq 1$	1.4-G1
$1 - \cos^2 u = \sin^2 u$ (multiplicar por $1 + \cos u$)	Expresiones con $1 - \cos u$	1.4-G1
$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$	Expresiones con tangente	1.4-G1
Cambio de variable $u = x - a$	$x \rightarrow a$ con $a \neq 0$: el argumento tiende a 0 solo después de trasladar	1.4-G1

 ERRORES COMUNES

Simplificar $\frac{\sin 5x}{x}$ como $\sin 5$: el seno no es un factor que se pueda cancelar.

Trabajar en grados.

Aplicar $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ cuando u no tiende a 0: por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, no 1.

 PRACTICA CON

1.4-G1	Límite que se reduce a $\frac{\sin u}{u}$ o a $\frac{1 - \cos u}{u}$
---------------	--

TEMA 1.5 Definición formal de límite (ϵ - δ)
 IDEA CENTRAL

La definición ϵ - δ convierte «tan cerca como se quiera» en una promesa precisa: para cualquier tolerancia $\epsilon > 0$ alrededor de L , existe una distancia $\delta > 0$ alrededor de a que la garantiza.

 DEFINICIONES
Definición ϵ - δ

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . Se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

ϵ mide la cercanía en el eje y ; δ , la cercanía en el eje x . La condición $0 < |x - a|$ excluye $x = a$: por eso el límite no depende de $f(a)$.

Otras definiciones formales

Lateral (f definida en un intervalo (a, c)): $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Por la izquierda (f definida en (c, a)), igual con $a - \delta < x < a$.

Límite infinito ($M - \delta$; f definida como en la definición $\varepsilon - \delta$): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Para $-\infty$ se pide $f(x) < -M$.

Límite al infinito ($\varepsilon - N$; f definida en un intervalo (c, ∞)): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Para $x \rightarrow -\infty$, igual con $x < N$.

TEOREMAS Y PROPIEDADES**Caso lineal**

Si: $f(x) = mx + b$ con $m \neq 0$, a es un número real y $L = ma + b$

Entonces: para cada $\varepsilon > 0$, el valor $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ cumple la definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

⚠ *Se comprueba así: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| = |m||x - a| < |m|\delta = \varepsilon$.*

Un δ más pequeño también sirve

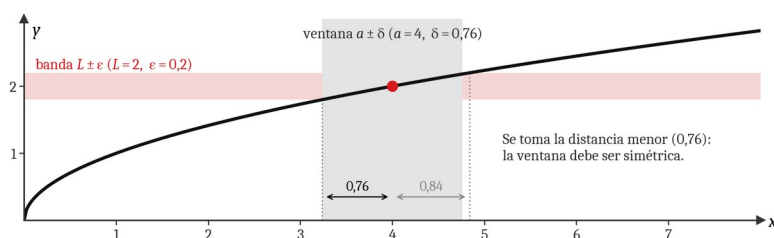
Si: $\delta > 0$ cumple la definición para un ε dado

Entonces: cualquier δ' con $0 < \delta' < \delta$ también la cumple para ese ε

⚠ *Por eso, si la condición $|f(x) - L| < \varepsilon$ da un intervalo asimétrico alrededor de a , se toma como δ la distancia menor.*

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Despejar $ x - a $ a partir de $ f(x) - L < \varepsilon$	ε numérico dado	1.5-G1
Suponer $ x - a < 1$, acotar el factor restante por una constante K y tomar $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{K}\right\}$	Funciones no lineales	1.5-T1
Separar borrador (buscar δ) y prueba (verificar δ)	Demostraciones	1.5-T1

REPRESENTACIÓN

Si $x \neq a$ está en la ventana $(a - \delta, a + \delta)$, simétrica alrededor de a , entonces $f(x)$ queda dentro de la banda $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

ERRORES COMUNES

Hacer que δ dependa de x : solo puede depender de ε (y de a).

Intercambiar los papeles de ε y δ : ε es dado (cualquiera) y δ es el que tú encuentras.

En un intervalo asimétrico, tomar la distancia mayor en lugar de la menor.

**PRACTICA CON**

1.5-G1	Encontrar δ para un ε dado
1.5-T1	Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)
1-T3	Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad (del módulo)

TEMA 1.6 Límites infinitos y asíntotas verticales**IDEA CENTRAL**

A veces, al acercarse x a un número a , la función no se acerca a ningún valor: crece (o decrece) sin cota. Ese comportamiento se escribe con ∞ o $-\infty$ y se ve en la gráfica como una recta vertical a la que la curva se acerca cada vez más.

**DEFINICIONES****Límite infinito**

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ se hace tan grande como se quiera tomando x suficientemente cerca de a , con $x \neq a$.

Formalmente: para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Para $-\infty$ se pide $f(x) < -M$; para los laterales se cambia $0 < |x - a| < \delta$ por $a < x < a + \delta$ (derecha) o por $a - \delta < x < a$ (izquierda).

Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si **al menos uno** de los límites laterales en a es ∞ o $-\infty$.

**TEOREMAS Y PROPIEDADES****Forma L/0**

Si: por un lado de a (izquierda o derecha): $N(x) \rightarrow L$ con $L \neq 0$, $D(x) \rightarrow 0$, y $D(x)$ no se anula y tiene signo constante en ese lado, cerca de a

Entonces: por ese lado, $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \infty$ si L y $D(x)$ tienen el mismo signo, y $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow -\infty$ si tienen signos distintos

Si también $N(x) \rightarrow 0$, la forma es $0/0$: no es este caso.

Límite infinito bilateral

Si: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ (o ambos son $-\infty$)

Entonces: se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (o $-\infty$)

Es una notación: el límite no existe como número real. Si los laterales son infinitos de signo distinto, se da cada lateral por separado y no se escribe ningún valor para el límite bilateral.

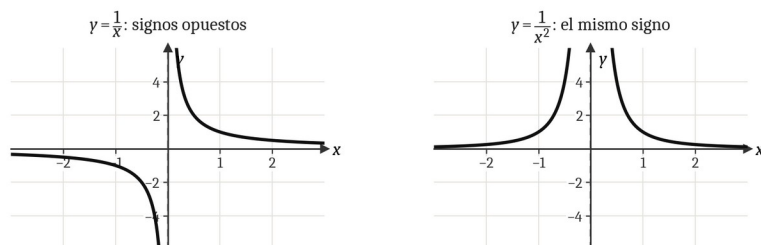
**FÓRMULAS Y TÉCNICAS**

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Análisis de signos de N y D a cada lado de a	Forma $L/0$ con $L \neq 0$	1.6-G1
Candidatos: ceros del denominador; $\ln u$ cuando $u \rightarrow 0^+$; $\tan x$ en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entero)	Buscar asíntotas verticales	1.6-G2

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Simplificar antes de decidir (hueco o asíntota)	Denominador que se anula	1.6-G2



REPRESENTACIÓN



Con $\frac{1}{x}$ (potencia impar) los dos lados tienen signos opuestos; con $\frac{1}{x^2}$ (potencia par), el mismo signo.



ERRORES COMUNES

Escribir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y decir que «el límite existe»: ∞ no es un número, describe un comportamiento.

Confundir un **hueco** con una asíntota vertical: si al simplificar el factor $(x - a)$ desaparece del denominador, en $x = a$ hay un hueco, no una asíntota.

Olvidar que con $(x - a)$ elevado a una potencia impar los dos lados tienen signos opuestos (y con potencia par, el mismo).



PRACTICA CON

1.6-G1	Límite cuando el denominador se anula y el numerador no
1.6-G2	Hallar las asíntotas verticales de una función
1-I2	Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)

TEMA 1.7 Límites al infinito y asíntotas horizontales y oblicuas



IDEA CENTRAL

Los límites al infinito describen el comportamiento a largo plazo: qué le pasa a $f(x)$ cuando x crece o decrece sin cota. Si $f(x)$ se estabiliza en un valor, la gráfica tiene una asíntota horizontal.



DEFINICIONES

Límite al infinito

Sea f definida en un intervalo (c, ∞) . $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como se quiera tomando x suficientemente grande. Formalmente: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Análogo para $x \rightarrow -\infty$, con f definida en $(-\infty, c)$ y $x < N$.

Límite infinito en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow f(x) > M$ (por ejemplo, x^3 o e^x).

Asíntotas no verticales

Horizontal: la recta $y=L$ es asíntota horizontal de la gráfica de f si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=L$.

Oblicua: la recta $y=mx+b$, con $m \neq 0$, es asíntota oblicua si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-(mx+b)]=0$ o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-(mx+b)]=0.$$

TEOREMAS Y PROPIEDADES**Potencias recíprocas**

Si: $r>0$ es un número racional

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r}=0$; si además x^r está definida para $x<0$, también $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r}=0$

Regla de los grados (funciones racionales)

Si: $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, donde N y D son polinomios de grados n y m con coeficientes principales a_n y b_m

Entonces: cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$: si $n<m$, $f(x) \rightarrow 0$; si $n=m$, $f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$; si $n>m$, $f(x) \rightarrow \infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$ (el signo depende de a_n , de b_m y del lado)

⚠ Si $n=m+1$, la gráfica tiene una asíntota oblicua: la recta dada por el cociente de dividir N entre D .

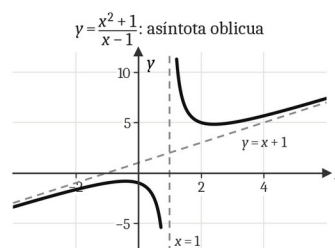
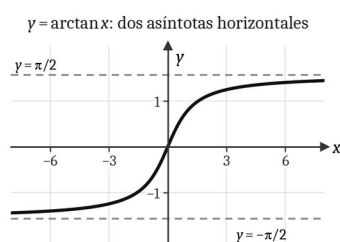
Funciones elementales

Si: se trabaja con e^x , $\ln x$ o $\arctan x$ en su dominio

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador	Cociente de polinomios	1.7-G1
$\sqrt{x^2}= x $ y conjugado	Radicales o $\infty - \infty$	1.7-G2
Dividir por la exponencial dominante; usar los límites de e^x , $\ln x$ y $\arctan x$	Exponenciales, logaritmos o arcotangente	1.7-G3
División de polinomios: $f(x)=mx+b+\frac{R(x)}{D(x)}$ con grado de R menor que grado de D	Asíntota oblicua	1.7-G4

REPRESENTACIÓN

Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas (como $\arctan x$) o una asíntota oblicua (como $\frac{x^2+1}{x-1}$, con $y=x+1$).



ERRORES COMUNES

Pensar que $\infty - \infty = 0$: es una forma indeterminada.

Escribir $\sqrt{x^2} = x$ cuando $x \rightarrow -\infty$: allí $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Creer que la gráfica nunca cruza una asíntota horizontal: puede cruzarla (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ cruza $y=0$ infinitas veces).

Analizar solo $x \rightarrow \infty$ y olvidar $x \rightarrow -\infty$.



PRACTICA CON

1.7-G1	Límite al infinito de una función racional
1.7-G2	Límite al infinito con radicales
1.7-G3	Límite al infinito con exponenciales, logaritmos o arcotangente
1.7-G4	Hallar asíntotas horizontales y oblicuas
1-I2	Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)
1-A1	Interpretar un límite en un contexto (del módulo)

TEMA 1.8 Continuidad en un punto y tipos de discontinuidad



IDEA CENTRAL

Una función es continua en a cuando su gráfica no se rompe allí: el valor $f(a)$ coincide con el valor al que la función se acerca.



DEFINICIONES

Continuidad en un punto

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . f es continua en a si se cumplen las tres condiciones: (1) $f(a)$ está definido; (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si alguna falla, f es discontinua en a .

Tipos de discontinuidad

Si f es discontinua en a , estos son los tipos más frecuentes:

Evitable: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (es un número), pero $f(a)$ no está definido o es distinto del límite.

De salto: los dos límites laterales existen (son números) y son distintos.

Infinita: al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$.

Oscilante: algún límite lateral no existe porque f oscila sin acercarse a ningún valor, como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0. Las de salto, infinitas y oscilantes son **no evitables**: ningún valor de $f(a)$ las elimina.

Continuidad lateral

f es continua por la derecha en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; es continua por la izquierda en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. f es continua en a si y solo si es continua por ambos lados.

Continuidad en un intervalo

f es continua en un intervalo si es continua en cada punto interior del intervalo y, en cada extremo que pertenece al intervalo, tiene la continuidad lateral correspondiente: por la derecha en el extremo izquierdo y por la izquierda en el extremo derecho.

Extensión continua

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe pero $f(a)$ no está definido (o es distinto de L), la función $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ es continua en a . Si $f(a)$ no estaba definido, F es la extensión continua de f en a ; si estaba definido, se dice que se redefine $f(a)$. Solo es posible en las discontinuidades evitables.

TEOREMAS Y PROPIEDADES**Operaciones con funciones continuas**

Si: f y g son continuas en a y c es una constante

Entonces: $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$ y $f \cdot g$ son continuas en a ; $\frac{f}{g}$ también lo es si $g(a) \neq 0$

Funciones elementales

Si: f es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica, trigonométrica o trigonométrica inversa

Entonces: f es continua en cada punto de su dominio (en un extremo del dominio, con la continuidad lateral correspondiente)

⚠ Fuera del dominio no se habla de continuidad: por ejemplo, $\frac{1}{x}$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Límite de una composición

Si: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y f es continua en L

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L)$

⚠ Exige que la función de afuera, f , sea continua en L . En particular, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .

Conservación del signo

Si: f es continua en a y $f(a) > 0$

Entonces: existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$

⚠ Se demuestra con $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ en la definición de límite (arquetipo 1-T3). Análogo si $f(a) < 0$.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Verificar las tres condiciones en orden	¿Es continua en a ?	1.8-G1
Calcular los límites laterales y compararlos con $f(a)$	Tipo de discontinuidad	1.8-G2
Dominio + revisar las uniones de tramos	¿Dónde es continua f ?	1.8-G3
Meter el límite dentro de la función continua: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$	Composición con f continua	1.8-G4
Igualar los dos laterales y $f(a)$ en cada unión	Constantes que dan continuidad	1-I1



REPRESENTACIÓN



Los tres tipos de discontinuidad más frecuentes: evitable, de salto e infinita.



ERRORES COMUNES

Creer que basta con que el límite exista: también debe ser igual a $f(a)$.
 Clasificar la discontinuidad por el valor $f(a)$ en lugar de por los límites laterales.
 Olvidar la continuidad lateral en los extremos de un intervalo cerrado.



PRACTICA CON

1.8-G1	Verificar la continuidad en un punto
1.8-G2	Clasificar una discontinuidad
1.8-G3	Hallar los intervalos donde una función es continua
1.8-G4	Límite de una función compuesta usando la continuidad
1-I1	Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua (del módulo)
1-A2	Continuidad en un modelo por tramos (del módulo)

TEMA 1.9 Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio



IDEA CENTRAL

Una función continua en un intervalo cerrado no puede saltarse valores: si empieza por debajo de un nivel y termina por encima, tiene que cruzarlo en algún punto.



DEFINICIONES

Continuidad en un intervalo cerrado

f es continua en $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) , continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b . En particular, $f(a)$ y $f(b)$ deben estar definidos.



TEOREMAS Y PROPIEDADES

Teorema del Valor Intermedio

Si: f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$

Entonces: existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$



Garantiza la existencia de c , no su unicidad ni su ubicación exacta.

Existencia de raíces (Bolzano)

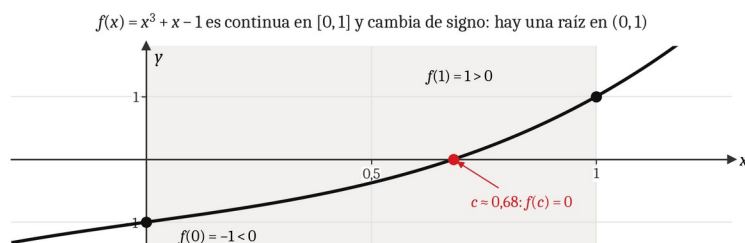
Si: f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces: existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$: la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en (a, b)

⚠ *Es el TVI con $k=0$.*

 FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Pasar todo a un lado, $h(x)=0$, y buscar un cambio de signo de h	Probar que una ecuación tiene solución	1.9-G1
Bisección: repetir en la mitad donde hay cambio de signo	Localizar la raíz en un intervalo pequeño	1.9-G1
Revisar las hipótesis una por una	¿Se puede aplicar el teorema?	1-T2

 REPRESENTACIÓN


$f(x) = x^3 + x - 1$ es continua en $[0, 1]$ y cambia de signo: tiene una raíz en $(0, 1)$.

 ERRORES COMUNES

Aplicar el teorema sin comprobar la continuidad en todo $[a, b]$: por ejemplo, $\frac{1}{x}$ cambia de signo en $[-1, 1]$ y no tiene raíces.

Pensar que si $f(a) \cdot f(b) > 0$ no hay raíces: el teorema simplemente no dice nada (por ejemplo, $x^2 - \frac{1}{4}$ es positiva en $x = -1$ y en $x = 1$, y tiene dos raíces en $[-1, 1]$).

Creer que el teorema da el valor de la raíz: solo asegura que existe.

 PRACTICA CON

1.9-G1	Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo
1-T2	Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio (del módulo)



Mapa de reconocimiento del módulo

Frente a un problema nuevo: ¿qué ves? → ¿qué arquetipo es?

Sí ves...	Es el arquetipo...	Código
Te dan una gráfica y piden $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Límite a partir de una gráfica	1.1-G1
Te piden estimar con una tabla o calculadora	Límite a partir de una tabla de valores	1.1-G2
La fórmula cambia justo en $x=a$ (tramos, $ \cdot $, $\llbracket \cdot \rrbracket$)	Límite donde cambia la fórmula	1.2-G1
Al sustituir sale un número	Sustitución directa	1.3-G1
Solo te dan los valores de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	Combinación de límites conocidos	1.3-G2
0/0 con polinomios	Factorizar	1.3-G3
0/0 con raíces	Racionalizar	1.3-G4
0/0 con fracciones dentro de fracciones	Común denominador	1.3-G5
Función acotada (sen, cos) multiplicada por algo que tiende a 0	Teorema del emparedado	1.3-G6
0/0 con seno, coseno o tangente	Límites trigonométricos	1.4-G1
Se da ε numérico y se pide δ	Encontrar δ	1.5-G1
«Demuestra con la definición...» (para todo ε o todo M), con una función concreta	Demostración con la definición formal	1.5-T1
Número $\neq 0$ dividido entre 0	Límite infinito ($L/0$)	1.6-G1
Se piden todas las asíntotas verticales	Hallar asíntotas verticales	1.6-G2
$x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ en un cociente de polinomios	Racional al infinito	1.7-G1
$x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ con raíces o $\infty - \infty$	Radicales al infinito	1.7-G2
$x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ con e^x , $\ln x$ o $\arctan x$	Trascendentes al infinito	1.7-G3
Se piden asíntotas horizontales u oblicuas	Asíntotas no verticales	1.7-G4
«¿Es continua en a ?»	Continuidad en un punto	1.8-G1
«¿Qué tipo de discontinuidad es?»	Clasificar una discontinuidad	1.8-G2
«¿Dónde es continua f ?»	Intervalos de continuidad	1.8-G3
Límite de $f(g(x))$ con f continua	Composición	1.8-G4
«Muestra que la ecuación tiene una solución en...»	Teorema del Valor Intermedio	1.9-G1
Qué significa un límite en un modelo real	Interpretar un límite en contexto	1-A1
Un modelo real por tramos (tarifas, impuestos)	Continuidad en un modelo por tramos	1-A2
Constantes en una función por tramos y se pide continuidad	Constantes para que sea continua	1-I1
Se piden todas las asíntotas y huecos	Análisis completo de asíntotas	1-I2
Una lista de condiciones y se pide dibujar	Esbozar una gráfica con condiciones	1-I3
«Demuestra que el límite no existe»	Límite que no existe	1-T1

Sí ves...	Es el arquetipo...	Código
«¿Se puede aplicar el TVI?»	Hipótesis del TVI	1-T2
Una afirmación general, sin fórmula: «sí...», entonces...», verdadero o falso	Demostrar o refutar una afirmación general	1-T3
Parámetros en un límite con un valor exigido	Parámetros para que exista	1-X1
Ninguna plantilla encaja al primer intento	Límites no rutinarios	1-X2

✓ Autoevaluación del módulo

Marca lo que ya puedes hacer sin mirar la teoría.

☐	Puedo estimar un límite en una gráfica y con una tabla, y sé cuándo una tabla engaña. (1.1)
☐	Puedo calcular límites laterales en un punto donde cambia la fórmula. (1.2)
☐	Puedo elegir la técnica correcta según la forma que aparece al sustituir. (1.3)
☐	Puedo reducir un límite trigonométrico a $\frac{\sin u}{u}$ o a $\frac{1 - \cos u}{u}$. (1.4)
☐	Puedo encontrar δ para un ε dado y explicar qué significa. (1.5)
☐	Puedo decidir con análisis de signos si un límite es ∞ , $-\infty$ o no existe. (1.6)
☐	Puedo calcular límites al infinito y hallar asíntotas horizontales y oblicuas. (1.7)
☐	Puedo verificar la continuidad con las tres condiciones y clasificar discontinuidades. (1.8)
☐	Puedo usar el TVI para probar que una ecuación tiene solución. (1.9)

☞ El límite no pregunta dónde está la función, sino hacia dónde va.