

 IDEA CENTRAL

Una función es continua en a cuando su gráfica no se rompe allí: el valor $f(a)$ coincide con el valor al que la función se acerca.

 DEFINICIONES**Continuidad en un punto**

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . f es continua en a si se cumplen las tres condiciones: (1) $f(a)$ está definido; (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si alguna falla, f es discontinua en a .

Tipos de discontinuidad

Si f es discontinua en a , estos son los tipos más frecuentes:

Evitable: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (es un número), pero $f(a)$ no está definido o es distinto del límite.

De salto: los dos límites laterales existen (son números) y son distintos.

Infinita: al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$.

Oscilante: algún límite lateral no existe porque f oscila sin acercarse a ningún valor, como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0. Las de salto, infinitas y oscilantes son **no evitables**: ningún valor de $f(a)$ las elimina.

Continuidad lateral

f es continua por la derecha en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; es continua por la izquierda en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. f es continua en a si y solo si es continua por ambos lados.

Continuidad en un intervalo

f es continua en un intervalo si es continua en cada punto interior del intervalo y, en cada extremo que pertenece al intervalo, tiene la continuidad lateral correspondiente: por la derecha en el extremo izquierdo y por la izquierda en el extremo derecho.

Extensión continua

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe pero $f(a)$ no está definido (o es distinto de L), la función $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ es continua en a . Si $f(a)$ no estaba definido, F es la extensión continua de f en a ; si estaba definido, se dice que se redefine $f(a)$. Solo es posible en las discontinuidades evitables.

TEOREMAS Y PROPIEDADES**Operaciones con funciones continuas**

Si: f y g son continuas en a y c es una constante

Entonces: $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$ y $f \cdot g$ son continuas en a ; $\frac{f}{g}$ también lo es si $g(a) \neq 0$

Funciones elementales

Si: f es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica, trigonométrica o trigonométrica inversa

Entonces: f es continua en cada punto de su dominio (en un extremo del dominio, con la continuidad lateral correspondiente)

⚠ **Fuera del dominio no se habla de continuidad: por ejemplo, $\frac{1}{x}$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.**

Límite de una composición

Si: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y f es continua en L

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L)$

⚠ **Exige que la función de afuera, f , sea continua en L . En particular, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .**

Conservación del signo

Si: f es continua en a y $f(a) > 0$

Entonces: existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$

⚠ **Se demuestra con $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ en la definición de límite (arquetipo 1-T3). Análogo si $f(a) < 0$.**

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Verificar las tres condiciones en orden	¿Es continua en a ?	1.8-G1
Calcular los límites laterales y compararlos con $f(a)$	Tipo de discontinuidad	1.8-G2
Dominio + revisar las uniones de tramos	¿Dónde es continua f ?	1.8-G3
Meter el límite dentro de la función continua: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$	Composición con f continua	1.8-G4
Igualar los dos laterales y $f(a)$ en cada unión	Constantes que dan continuidad	1-I1



REPRESENTACIÓN



Los tres tipos de discontinuidad más frecuentes: evitable, de salto e infinita.



ERRORES COMUNES

Creer que basta con que el límite exista: también debe ser igual a $f(a)$.

Clasificar la discontinuidad por el valor $f(a)$ en lugar de por los límites laterales.

Olvidar la continuidad lateral en los extremos de un intervalo cerrado.



PRACTICA CON

1.8-G1	Verificar la continuidad en un punto
1.8-G2	Clasificar una discontinuidad
1.8-G3	Hallar los intervalos donde una función es continua
1.8-G4	Límite de una función compuesta usando la continuidad
1-I1	Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua (del módulo)
1-A2	Continuidad en un modelo por tramos (del módulo)