



IDEA CENTRAL

Los límites al infinito describen el comportamiento a largo plazo: qué le pasa a $f(x)$ cuando x crece o decrece sin cota. Si $f(x)$ se estabiliza en un valor, la gráfica tiene una asíntota horizontal.



DEFINICIONES

Límite al infinito

Sea f definida en un intervalo (c, ∞) . $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como se quiera tomando x suficientemente grande. Formalmente: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Análogo para $x \rightarrow -\infty$, con f definida en $(-\infty, c)$ y $x < N$.

Límite infinito en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow f(x) > M$ (por ejemplo, x^3 o e^x).

Asíntotas no verticales

Horizontal: la recta $y=L$ es asíntota horizontal de la gráfica de f si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=L$.

Oblicua: la recta $y=mx+b$, con $m \neq 0$, es asíntota oblicua si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-(mx+b)]=0$ o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-(mx+b)]=0.$$

TEOREMAS Y PROPIEDADES**Potencias recíprocas**

Si: $r>0$ es un número racional

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r}=0$; si además x^r está definida para $x<0$, también $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r}=0$

Regla de los grados (funciones racionales)

Si: $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, donde N y D son polinomios de grados n y m con coeficientes principales a_n y b_m

Entonces: cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$: si $n<m$, $f(x) \rightarrow 0$; si $n=m$, $f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$; si $n>m$, $f(x) \rightarrow \infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$ (el signo depende de a_n , de b_m y del lado)

⚠ Si $n=m+1$, la gráfica tiene una asíntota oblicua: la recta dada por el cociente de dividir N entre D .

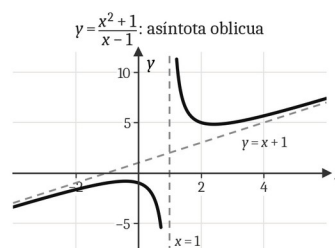
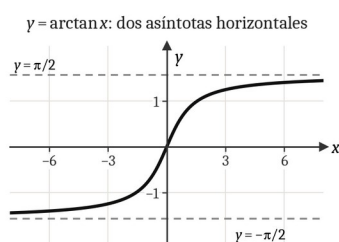
Funciones elementales

Si: se trabaja con e^x , $\ln x$ o $\arctan x$ en su dominio

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador	Cociente de polinomios	1.7-G1
$\sqrt{x^2}= x $ y conjugado	Radicales o $\infty - \infty$	1.7-G2
Dividir por la exponencial dominante; usar los límites de e^x , $\ln x$ y $\arctan x$	Exponenciales, logaritmos o arcotangente	1.7-G3
División de polinomios: $f(x)=mx+b+\frac{R(x)}{D(x)}$ con grado de R menor que grado de D	Asíntota oblicua	1.7-G4

REPRESENTACIÓN

Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas (como $\arctan x$) o una asíntota oblicua (como $\frac{x^2+1}{x-1}$, con $y=x+1$).



ERRORES COMUNES

Pensar que $\infty - \infty = 0$: es una forma indeterminada.

Escribir $\sqrt{x^2} = x$ cuando $x \rightarrow -\infty$: allí $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Creer que la gráfica nunca cruza una asíntota horizontal: puede cruzarla (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ cruza $y=0$ infinitas veces).

Analizar solo $x \rightarrow \infty$ y olvidar $x \rightarrow -\infty$.



PRACTICA CON

1.7-G1	Límite al infinito de una función racional
1.7-G2	Límite al infinito con radicales
1.7-G3	Límite al infinito con exponenciales, logaritmos o arcotangente
1.7-G4	Hallar asíntotas horizontales y oblicuas
1-I2	Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)
1-A1	Interpretar un límite en un contexto (del módulo)